11.
Auflösung einiger Aufgaben aus der Calendariographie.

(Von Herrn *G. A. Jahn,* Stud. math. aus Leipzig.)

Durch eine nähere Betrachtung meiner vor drei Jahren im Druck erschienenen „Fest-Tabelle von 1700 bis 2000," Leipzig, in der Baumgärtnerschen Buchandlung, wurde ich veranlafst, mehrere, den Jul. und Greg. Kalender betreffende Aufgaben zu behandeln, deren Auflösung einer öffentlichen Mittheilung nicht unwerth zu sein scheint.

Bekanntlich ist das von Gaufs angegebene Verfahren, den Ostersonntag (Mten März) eines Jahres N, Greg. Styls, rein arithmetisch zu bestimmen, in folgenden Operationen enthalten:

$$\text{I.}\left\{\begin{array}{ll} 1. & \frac{N}{19}=A+\frac{a}{19}, \\ 2. & \frac{N}{4}=B+\frac{b}{4}, \\ 3. & \frac{N}{7}=C+\frac{c}{7}, \\ 4. & \frac{m+19a}{30}=D+\frac{d}{30}, \\ 5. & \frac{n+2b+4c+6d}{7}=E+\frac{e}{7}, \\ 6. & M=22+d+e, \end{array}\right.$$

wo m und n die für jedes Jahrhundert bekannten Constanten bedeuten.

Setzen wir uns nun die umgekehrte Aufgabe vor, d. h. suchen wir das Jahr N eines gegebenen Jahrhunderts, in welchem der Ostersonntag auf den Mten März fällt, so wird diese Aufgabe eine unbestimmte. Versuchen wir sie aufzulösen.

1) Folgt aus den Gleichungen (1.) und (2.) nach Elimination von N:

$$B=\frac{19A+a-b}{4}=5A+x, \text{ also } x=\frac{a-b-A}{4}, \text{ woraus}$$
$$A=a-b-4x, \text{ folglich}$$
$$B=5a-5b-19x;$$

2) aus den Gleichungen (2.) und (3.) nach Elimination von N:

$$B=\frac{7C+c-b}{4}=2C+x', \text{ also } x'=\frac{c-b-C}{4}, \text{ woraus}$$
$$C=c-b-4x', \text{ folglich}$$
$$B=2c-2b-7x';$$

3) aus der Gleichstellung beider gefundenen Werthe von B:

$$x' = \frac{19x-5a+3b+2c}{7} = 3x-a+y, \text{ also } y = \frac{2a+3b+2c-2x}{7}, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{2a+3b+2c-7y}{2} = a+b+c-3y+y', \text{ also } y' = \frac{b-y}{2}, \text{ woraus}$$

$$y = b-2y', \text{ folglich}$$
$$x = a+c-2b+7y',$$
$$x' = 2a+3c-5b+19y';$$

4) nach Substitution der gefundenen Werthe von x, x' in die Gleichungen für A, B, C:

$$A = -3a+7b-4c-28y',$$
$$B = -14a+33b-19c-133y',$$
$$C = -8a+19b-11c-76y';$$

5) nach Substitution dieser Werthe in eine der Gleichungen (1.), (2.), (3.):

$$N = -56a+133b-76c-532y';$$

6) aus der Gleichung (4.):

$$a = \frac{30D+d-m}{19} = 2D+z, \text{ also } z = \frac{d-m-8D}{19}, \text{ woraus}$$

$$D = \frac{d-m-19z}{8} = -2z+z', \text{ also } z' = \frac{d-m-3z}{8}, \text{ woraus}$$

$$z = \frac{d-m-8z'}{3} = -3z'+z'', \text{ also } z'' = \frac{d-m+z'}{3}, \text{ woraus}$$

$$z' = 3z''+m-d, \text{ folglich}$$
$$z = -8z''-3m+3d,$$
$$D = 19z''+7m-7d,$$
$$a = 30z''+11m-11d;$$

7) aus der Gleichung (5.):

$$c = \frac{7E+e-n-2b-6d}{4} = 2E-d+u, \text{ also } u = \frac{e-n-2b-2d-E}{4}, \text{ woraus}$$

$$E = e-n-2b-2d-4u, \text{ folglich}$$
$$c = 2e-2n-4b-5d-7u;$$

8) aus der Gleichung (6.):

$$d = M-22-e.$$

Durch die vier gefundenen Gleichungen

$$\text{II.} \begin{cases} 1. & d = M-22-e, \\ 2. & a = 11m-11d+30z'', \\ 3. & c = -2n-4b+2e-5d-7u, \\ 4. & N = 133b-56a-76c-532y' \end{cases}$$

sind nun die anfänglichen Gleichungen (I.) so weit reducirt, als es möglich ist, und dienen, sobald in ihnen b und e willkürlich genommen werden, zur Bestimmung von N.

Folgende Betrachtungen jedoch werden uns noch auf einige Abkürzungen dieser Auflösung leiten.

Setzen wir b constant, und bilden aus den vorstehenden Gleichungen die Differenzengleichungen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\triangle d &= -\triangle e,\\ \triangle a &= -11\triangle d + 30\triangle z'',\\ \triangle c &= +2\triangle e - 5\triangle d - 7\triangle u,\\ \triangle N &= -56\triangle a - 76\triangle c - 532\triangle y';\end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned}\triangle d &= -\triangle e,\\ \triangle a &= +11\triangle e + 30\triangle z'',\\ \triangle c &= +7(\triangle e - \triangle u),\\ \triangle N &= -1148\triangle e - 1680\triangle z'' + 532\triangle u - 532\triangle y'.\end{aligned}$$

Da nun c nach der Gleichung (3.) in (I.) kleiner als 7 ist, so mufs, da die Incremente $\triangle e$, $\triangle d$, $\triangle z''$, u. s. w. immer nur ganze Zahlen sein dürfen, $\triangle u = \triangle e$, mithin $\triangle c = 0$, also für ein constantes b auch c constant sein. Folglich ist dann:

$$\begin{aligned}\triangle a &= +11\triangle e + 30\triangle z'',\\ \triangle N &= -616\triangle e - 1680\triangle z'' - 532\triangle y'.\end{aligned}$$

Wenn wir daher $\triangle e$ der Reihe nach die Werthe 0, 1, ... 6 geben, so ergiebt sich folgende tabellarische Übersicht der zusammengehörenden Werthe von $\triangle e$, $\triangle z''$, $\triangle a$ und $\triangle N$:

$\triangle e$	$\triangle z''$	$\triangle a$	$\triangle N$
0	0	0	$-\ \ 0 - 532\triangle y'$
1	0	11	$-\ 616 - 532\triangle y'$
2	0	22	$-1232 - 532\triangle y'$
3	-1	3	$-\ 168 - 532\triangle y'$
4	-1	14	$-\ 784 - 532\triangle y'$
5	-1	25	$-1400 - 532\triangle y'$
6	-2	6	$-\ 336 - 532\triangle y'$

Setzen wir also $e = 0$, und $\triangle e$ nach und nach $= 0, 1, \ldots . 6$, nennen die ihnen zugehörenden Jahre N, N', N'' u. s. w., und bemerken, dafs für $\triangle e = 0$, auch $\triangle N = 0$, mithin auch $\triangle y' = 0$ sein mufs, so haben wir:

$$\begin{aligned}N &= N & N^{\text{IV}} &= N - 784\\ N' &= N - 616 & N^{\text{V}} &= N - 1400\\ N'' &= N - 1232 & N^{\text{VI}} &= N - 336.\\ N''' &= N - 168.\end{aligned}$$

Übrigens werden wir auf ähnliche Art leicht finden, dafs, wenn für b das erste Jahr $=N$ ist, dann für $b+\triangle b$ das erste Jahr $=N-95\triangle b$ sein mufs. Aus diesen Betrachtungen nun geht fast von selbst folgende allgemeine, und für die numerische Rechnung bequeme Auflösung der Aufgabe hervor.

Nachdem das Jahrhundert und der Ostersonntag gegeben ist, bestimme man die Gröfsen a, c aus den Gleichungen

$$a = 242+11m-11M+30z'',$$
$$c = 110-2n-5M-7u,$$

wo z'' und u so zu nehmen sind, dafs a und c respective kleiner als 19 und 7 bleiben, so hat man folgende 28 Jahre:

$$N = -4(14a+19c)-532y'$$

$N_1 = N - 616$	$N_{10} = N_9 + 1064$	$N_{19} = N_{18} - 616$
$N_2 = N_1 - 616$	$N_{11} = N_{10} - 616$	$N_{20} = N_{19} + 1064$
$N_3 = N_2 + 1064$	$N_{12} = N_{11} - 616$	$N_{21} = N_{20} + 241$
$N_4 = N_3 - 616$	$N_{13} = N_{12} + 1064$	$N_{22} = N_{21} - 616$
$N_5 = N_4 - 616$	$N_{14} = N_{13} + 241$	$N_{23} = N_{22} - 616$
$N_6 = N_5 + 1064$	$N_{15} = N_{14} - 616$	$N_{24} = N_{23} + 1064$
$N_7 = N_6 + 241$	$N_{16} = N_{15} - 616$	$N_{25} = N_{24} - 616$
$N_8 = N_7 - 616$	$N_{17} = N_{16} + 1064$	$N_{26} = N_{25} - 616$
$N_9 = N_8 - 616$	$N_{18} = N_{17} - 616$	$N_{27} = N_{26} + 1064$;

von welchen höchstens 4 reell sein werden, d. h. in denen y' so gewählt werden kann, dafs dadurch die Jahre in das gegebene Jahrhundert fallen. Ein Beispiel wird dieses noch mehr erläutern.

Man sucht alle Jahre des 19ten Jahrhunderts, in denen der Ostersonntag auf den 31. März fällt.

Hier ist also $M=31$, $m=23$, $n=4$, und folglich

$$a = +154+30z'',$$
$$c = -53-7u;$$

$z=-5$, giebt $a=4$; $u=-8$, giebt $c=3$; und daher die Jahre

$-452-532y'$	$-547-532y'$	$-642-532y'$	$-737-532y'$
$-1068-532y'$	$-1163-532y'$	$-1258-532y'$	$-1353-532y'$*
$-1684-532y'$	$-1779-532y'$	$-1874-532y'$*	$-1969-532y'$
$-620-532y'$	$-715-532y'$	$-810-532y'$	$-905-532y'$
$-1236-532y'$	$-1331-532y'$*	$-1426-532y'$	$-1521-532y'$
$-1852-532y'$	$-1947-532y'$	$-2042-532y'$	$-2137-532y'$
$-788-532y'$*	$-883-532y'$	$-978-532y'$	$-1073-532y'$

von denen nur die mit Sternchen bezeichneten möglich sind; nemlich 1872, 1861, 1850, 1839.

Für den Julianischen Kalender, wo für alle Jahrhunderte $m = 15$, $n = 6$ ist, wird die Auflösung noch viel einfacher. Man bestimme nemlich die Gröfsen a, c aus den Gleichungen:

$$a = 307 - 11M + 30z'',$$
$$c = 98 - 5M - 7u,$$

so hat man

$$N = -4(14a + 19c) - 532y',$$
$$N_1 = -4(14a + 19c) - 95 - 532y',$$
$$N_2 = -4(14a + 19c) - 190 - 532y',$$
$$N_3 = -4(14a + 19c) - 285 - 532y',$$

wo y' alle Werthe annehmen kann. Folglich erhält man 4 Reihen von Jahren, welche Ostern den Mten März haben. Übrigens ersieht man hieraus, dafs die Julianischen Ostersonntage nach 532 Jahren in derselben Ordnung wieder kehren. Ein Beispiel scheint überflüssig zu sein.

Um zu bestimmen, in welchen Jahren eines gegebenen Jahrhunderts der Februar 5 Sonntage hat, setze man in den Gleichungen (II.)

$$M = 28 + 7.\triangle M$$
$$e = 0$$
$$b = 0,$$

so erhält man, nachdem d eliminirt worden ist:

$$a = -66 + 11m - 77\triangle M + 30z'',$$
$$c = -30 - 2n - 35\triangle M - 7u \quad \text{und}$$

$$N = -56a - 76c - 532y' \qquad N_4 = N_3 - 616$$
$$N_1 = N - 616 \qquad N_5 = N_4 - 616$$
$$N_2 = N_1 - 616 \qquad N_6 = N_5 + 1064,$$
$$N_3 = N_2 + 1064$$

wo $\triangle M$ nach und nach $= 0, 1, 2, 3$ gesetzt wird.

Beispiel. Für das 19te Jahrhundert hat man:

$$m = 23, \quad n = 4; \quad \text{daher für } \triangle M = 0:$$
$$a = 187 + 30z''$$
$$c = -38 - 7u;$$

$z'' = -6$ giebt $a = 7$; $u = -6$ giebt $c = 4$, und daher die Jahre

$$-696 - 532y'$$
$$-1312 - 532y' *, \quad y' = -6 \text{ giebt } 1880,$$

$-1928-532y'$
$-864-532y'$
$-1480-532y'$
$-2096-532y'$
$-1032-532y';$

für $\triangle M=1$ folgt $a=110+30z''$
$c=-73-7u;$

$z=-3$ giebt $a=+20$; $u=-11$ giebt $c=4$, und daher die Jahre, wegen $a=20$, unmöglich:

für $\triangle M=2$ ist $a=33+30z''$
$c=-108-7u,$

$z''=-1$ giebt $a=3$; $u=-16$ giebt $c=4$, und daher die Jahre:

$-472-532y'$
$-1088-532y'$
$-1704-532y'$
$-640-532y'$
$-1256-532y'$
$-1872-532y'$*, $y'=-7$ giebt 1852,
$-808-532y';$

für $\triangle M=3$ ist $a=-44+30z''$
$c=-143-7u,$

$z''=+2$ giebt $a=16$; $u=-21$ giebt $c=4$, und daher die Jahre:

$-1200-532y'$
$-1816-532y'$
$-2432-532y'$*, $y'=-8$ giebt 1824,
$-1368-532y'$
$-1984-532y'$
$-2600-532y'$
$-1536-532y';$

für $\triangle M=4$ ist $a=-121+30z''$
$c=-178-7u,$

$z''=+5$ giebt $a=29$; $u=-26$ giebt $c=4$, und daher die Jahre, wegen $a=29$, unmöglich.

Um alle Julianischen Schaltjahre mit einem gegebenen Ostersonntage und bekannter goldnen Zahl zu bestimmen, setze man in den Gleichungen (II.)

$$b=0$$
$$a=\text{goldene Zahl}-1,$$

und es kommt

$$\text{III.}\begin{cases} 1. & d = M - 22 - e, \\ 2. & a = 30z'' + 165 - 11d, \\ 3. & c = 2e - 12 - 5d - 7u, \\ 4. & N = -56a - 76c - 532y'. \end{cases}$$

Aus der Gleichung (II.) folgt:

$$d = \frac{30z'' + 165 - a}{11} = 3z'' + 15 + \alpha, \quad \text{also} \quad \alpha = \frac{3z'' + a}{11}, \quad \text{woraus}$$

$$z'' = -\frac{a + 11\alpha}{3} = -4\alpha + \alpha', \quad \text{also} \quad \alpha' = \frac{\alpha - a}{3}, \quad \text{woraus}$$

$$\alpha = 3\alpha' + a, \quad \text{folglich}$$

$$z'' = -11\alpha' - 4a,$$

$$d = -30\alpha' - 11a + 15;$$

ferner aus der Gleichung (I.)

$$e = M - 22 - d.$$

Die beiden gefundenen Gleichungen

$$d = -30\alpha' - 11a + 15$$

$$e = M - 22 - d,$$

verbunden mit den 2 letzten in (III.) sind die zur numerischen Auflösung erforderlichen Ausdrücke.

Beispiel. Man sucht die Julianischen Schaltjahre mit der goldenen Zahl 14, in welchen der Ostersonntag auf den 19. April fällt?

Hier ist $M = 50$, $a = 13$; folglich

$$d = -30\alpha' - 128,$$

$$e = 28 - d,$$

$$c = 2e - 12 - 5d - 7u,$$

$$N = -56a - 76c - 532y';$$

$\alpha' = -5$ giebt $d = 22$, folglich $e = 6$, daher

$$c = -110 - 7u;$$

$u = -16$ giebt $c = 2$, folglich $N = -880 - 532y'$. Der kleinste Werth von $y' = -2$ giebt 184.

Man hat daher die Jahre

184
716
1248
1780
2312
2844 u. s. w.

Leipzig, im März 1830.